Hazırlayan
Mehmet Kaysi

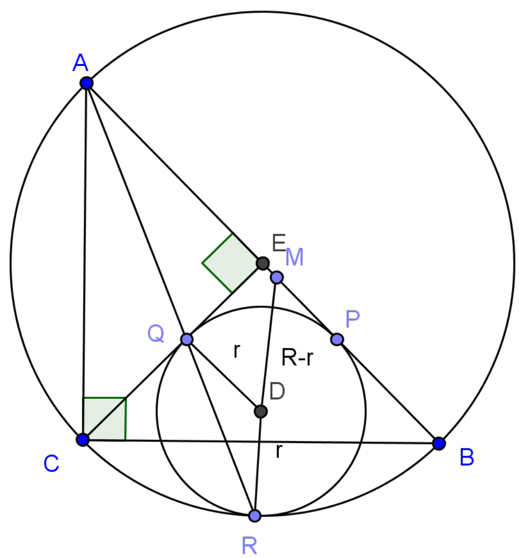
1. $(a+b)(b+c) = ab+ac+b^2+bc = b(a+b+c)+ac = b\dfrac{3}{abc}+ac = \dfrac{3}{ac}+ac$ olur, soruda verilen $abc(a+b+c)=3$ eşitliğinden. İfadeyi tekrar yazalım.

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (\frac{3}{ac}+ac)(a+c) = \frac{3}{a}+\frac{3}{c}+a^2c+ac^2$$

$$= \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+a^2c+ac^2 \geq 8\sqrt{\frac{1}{a}\frac{1}{a}\frac{1}{a}\frac{1}{c}\frac{1}{c}\frac{1}{c}a^2cac^2} = 8$$

2. (a) Toplam $\binom{9}{3} = 84$ şifre vardır.
   (b) Tüm rakamların kullanıldığı şifre üçlülerine kötü üçlüler diyelim((963, 852, 741) ya da (987, 456, 213) gibi). Toplam kötü üçlülerinin sayısı $\dfrac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{3!} = 280$.
   (c) Sabit bir şifrenin (örneğin 123'ün) içinde bulunduğu kötü şifrelerin sayısı $\dfrac{\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{2!} = 10$
   (d) (b) ve (c) yi beraber düşündüğümüzde 84 şifreden en az $\dfrac{280}{10} = 28$ şifre atmalıyız ki geriye kalan şifreler arasında kötü üçlü bulunmama ihtimali olsun. Dolayısıyla en fazla 84-28=56 şifre olabilir.
   (e) Cevabın 56 olması için örnek bulmamız gerekir. İçinde 9 geçen tüm şifreleri attığımızda tüm şartlar sağlanır. Başka bir deyişle şifrelerde sadece $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ sayıları kullanılırsa şartlar sağlanır ($\binom{8}{3} = 56$).

3. Küçük çemberin merkezi $D$ olsun. $ABC$ dik üçgen olduğundan $ABC$ üçgeninin merkezi $AB$ üzerindedir, bu merkez $M$ olsun. Ayrıca küçük çemberin yarıçapı r ve büyük çemberin yarıçapı R olsun.




**i.** $DQ \perp CF$ ve $MA \perp CF$ olduğundan $DQ \parallel MA$ 'dır. $RQ$ 'yu uzatalım ve $AB$ 'yi noktaya $A'$ diyelim. Paralellikten $RQD \sim RA'M$ olur. Burdan $\dfrac{RD}{RM} = \dfrac{DQ}{MA'}$ yani $\dfrac{r}{R} = \dfrac{r}{MA'}$ 'dan $MA' = R$ bulunur. $MA = R$ oldugundan $A$ ve $A'$ noktaları aynı noktalardır, yani $A$, $Q$, $R$ doğrudaştır.

**ii.** i)'yi de kullanarak $A$ noktasının kuvvetini alalım, $AP^2 = AQ \cdot AR$. $AC^2$ yi de Öklid'ten $AF \cdot AB$ olarak hesaplayabiliyoruz. Şimdi bu ikisini ilişkilendirmeye çalışacağız. $AQ$ ve $AF$, $AQF$ dik üçgeninin kenarlarıdır, $AR$ ve $AB$ ise, $ARB$ üçgeninin. $ARB$ üçgenine bakarsak, çapı gören $\angle ARB$ açısının $90°$ olduğunu görürüz. İki dik üçgenin $A$ açıları ortak olduğundan, iki üçgen benzerdir, $AFQ \sim ARB$. Benzerlikten $\dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{AF}{AR}$ yani $AQ \cdot AR = AF \cdot AB$. Toparlarsak, $AP^2 = AQ \cdot AR = AF \cdot AB = AC^2$ olur (eşitlikler sırayla kuvvet, benzerlik, Öklid).

4. İlk başta $36^n - 6$ sayısının ardışık 4 sayının çarpımı şeklinde yazılamayacağını görüyoruz, çünkü ardışık 4 sayının çarpımı 4 ile bölünürken $36^n - 6$ sayısı 4 ile bølünmez. Dolayısıyla $36^n - 6$ sayısı 3 ya da 2 sayının çarpımı şeklinde yazılabilir.

Hazırlayan
Mehmet Kaysi

**1. Durum:** 3 sayının çarpımı şeklinde yazılamayacağını gösterelim.
$36^n - 6 \equiv (-1)^n - (-1) \equiv (-1)^n + 1 (\mod 7)$ yani $36^n - 6 \equiv 2$ ya da $36^n - 6 \equiv 0 (\mod 7)$.
Diyelim ki $36^n - 6 = (a-1)a(a+1) = a^3 - a$. $a^3 - a$ ifadesi mod 7'deki tüm değerler için hesaplandığında, hiçbir $a$ değeri için 2 ya da 0 olmaz.

**2. Durum:** İki sayının çarpımı ise,
$36^n - 6 = a(a+1) = a^2 + a$. Sağ tarafı tamkare yapalım. Bunun için her iki tarafi 4 ile çarpıp, her iki tarafa da 1 ekleyelim.
$4 \cdot 36^n - 24 + 1 = 4a^2 + 4a + 1 \ \Rightarrow \ 2^2 \cdot (6^n)^2 - 23 = (2a+1)^2$
$(2 \cdot 6^n)^2 - (2a+1)^2 = 23 \ \Rightarrow (2 \cdot 6^n - 2a - 1)(2 \cdot 6^n + 2a + 1) = 23$
Burdan tek çözüm $2 \cdot 6^n - 2a - 1 = 1$, $2 \cdot 6^n + 2a + 1 = 23$ gelir. İkisinin farkını alırsak $4a + 2 = 22$, $a = 5$, $n = 1$ bulunur.

Tek çözüm $\boxed{\text{n=1}}$.