

1. Tüm kökleri 1 alırsak $(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$ dan $(b-a-c)^2 = 196d$ gelir. Dolayısıyla $k \leq 196$.

$k = 196$ 'nin sağladığını gösterelim. Polinomun kökleri x_1, x_2, x_3, x_4 olsun. Vieta'dan,

$$\begin{aligned} -a &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ b &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ -c &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\ d &= x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

Kökler pozitif olduğundan rahat rahat AGO uygulayabiliriz:

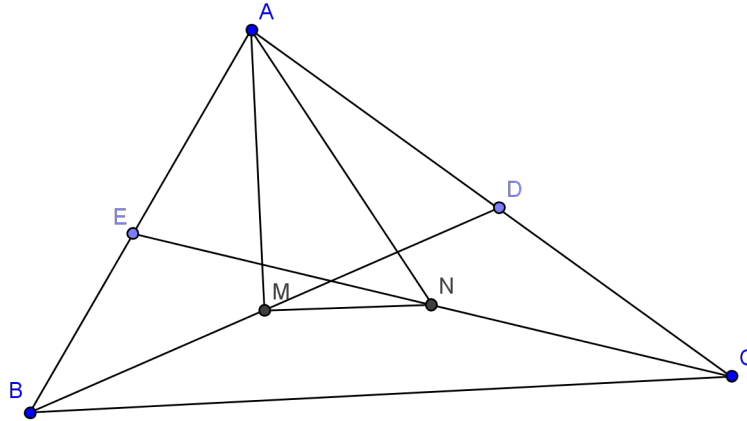
$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4}{14} \geq \sqrt[14]{x_1^7 x_2^7 x_3^7 x_4^7}$$

İfadeyi düzenleyi, Vieta'dan bulduğumuz değerleri yerine yazalım.

$$-a + b - c \geq 14\sqrt{d}$$

. Her iki tarafın da karesini alırsak istediğimiz eşitsizliği ispatlamış oluruz.

2. Çözümün tamamında, yükseklikleri eşit olan iki üçgenin alanları oranının tabanlarının oranına eşit olduğu fikrini kullanacağız. Çözümde (ABC) ifadesi ABC üçgeninin alanını belirtmek için kullanılacaktır.



$$(AMD) = (ABM) \text{ ve } (CMD) = (CMB) \text{ olduğundan } \frac{(ABC)}{2} = (AMC) \quad (1)$$

Şimdi AMC 'nin alanını başka bir şekilde ifade edelim.

$$(AMC) = (AMN) + (ANC) + (MNC) \quad (2). \text{ Aynı fikir kullanılarak } (ANC) = \frac{AEC}{2} \quad (3) \text{ ve}$$

$$(MNC) = \frac{CME}{2} \quad (4) \text{ bulunur.}$$

Şimdi, (1), (3) ve (4) te bulduklarımızı (2) 'de yerine yazalım.

$$(AMC) = (AMN) + (ANC) + (MNC)$$

$\frac{(ABC)}{2} = (AMN) + \frac{(AEC)}{2} + \frac{(CME)}{2}$ İki tarafı da 2 ile çarpalım ve (AMN) 'yi yalnız bırakalım.
 $(ABC) - (AEC) - (CME) = 2(AMN)$ Burda soldaki ifade $(EBCM)$ ye eşit olur.

$$(EBCM) = 2(AMN) \quad (5) \quad M \text{ noktası } BD \text{ nin orta noktası olduğu için } (EBCM) = \frac{(EBCD)}{2}.$$

Bunu (5) ile birleştirirsek,

$$\frac{(EBCD)}{2} = 2(AMN) \Rightarrow (EBCD) = 4(AMN)$$

bulunur.

3. Çözüme geçmeden önce, çözümü yazmayı ve anlamayı kolaylaştıracak tanımları verelim.
Kartların üzerindeki yazılı sayıları alt kümeler olarak düşünelim ve bu alt kümelerin kümesine K diyelim.
 $ENAZ(1, 2, 3)$ ile K 'de bulunan ve $\{1, 2, 3\}$ kümesi ile kesişimi boş olmayan alt kümelerin kümesini (yani içinde $\{1, 2, 3\}$ sayılarından en az bir tanesinin geçtiği kümelerin kümesini) gösterelim.
 $ALT(1, 2, 3)$ ile de K de bulunan $\{1, 2, 3\}$ kümesinin alt kümelerinin kümesini gösterelim.

Özet: Sorunun genelinde şu fikri kullanacağız: $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ kümesinin herhangi boş olmayan bir özalt kümesini alalım, A . $1 \leq |A| \leq 7$ olduğundan $n = |ENAZ(A)| + |ALT(A')|$ olur. (Burda A' , $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ kümesi ile A kümesinin farkını gösteriyor.)

1. Durum: K 'de tek elemanlı bir alt küme varsa,

Genelliği bozmadan $\{1\} \in K$ olsun. $n = |ALT(1)| + |ENAZ(2, 3, \dots, 8)|$ ve $|ALT(1)| = 1$, $ENAZ(2, 3, \dots, 8)$ çift olduğundan n sayısı tek olur.

Şimdi, $a \in \{2, 3, \dots, 8\}$ olmak üzere $a \in K$ olduğunu gösterelim.

$n = |ALT(a)| + |ENAZ(1, 2, \dots, a-1, a+1, \dots, 8)|$. n tek ve $|ENAZ(1, 2, \dots, a-1, a+1, \dots, 8)|$ çift olduğu için $|ALT(a)|$ tek olmalı. $|ALT(a)|$ sadece 0 veya 1 olabileceği için $ALT(a) = 1$ 'dir yani $a \in K$ 'dir. Yani tüm tek elemanlı kümeler K 'nin elemanıdır.

Tüm iki elemanlı alt kümelerin K 'nin içinde olduğunu gösterelim.

Bunun için sadece $\{1, 2\}$ 'nin, K 'nin elemanı olduğunu göstermemiz yeterli. $n = |ALT(1, 2)| + |ENAZ(3, 4, 5, 6, 7, 8)|$. Burada n tek sayı ve $|ENAZ(3, 4, 5, 6, 7, 8)|$ çift sayı olduğu için $|ALT(1, 2)|$ tek sayı olmak zorunda. $\{1\}$ ve $\{2\}$ K 'nin içinde olduğu için $\{1, 2\}$ de K 'nin içinde olmak zorunda.

Benzer ispatı tüm üç elemanlı kümeler için yapalım.

$n = |ALT(1, 2, 3)| + |ENAZ(4, 5, 6, 7, 8)|$ olduğundan $|ALT(1, 2, 3)|$ tek olmalı. $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ K 'nin içinde olduğu için $\{1, 2, 3\}$ 'de K 'nin içindedir.

Benzer şekilde devam edildiğinde boş küme ve $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ hariç tüm kümelerin K 'nin içinde olduğu gösterilir. (Burada temel espri, $|ALT(A)|$ sayısının her zaman tek olması ve

tümevarımdan dolayı A 'nın çift sayıda özalt kümesinin K nin içinde bulunmasıdır. Dolayısıyla A da K nin içindedir.)

Son olarak da n sayısı tek olduğundan ve şu ana kadar $2^8 - 2 = 254$ elemanın K nin içinde olduğunu gösterdiğimizden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ de K nin içindedir ve $n = 255$ 'tir.

2. Durum K 'de tek elemanlı hiç alt küme yoksa,

Bu durumda, $n = |ALT(1)| + |ENAZ(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)|$ ve $ALT(1) = 0$ olduğundan n çift olur.

Bu durumda özetle, yukarıdaki adımları tekrarlayarak K 'de hiç küme olmadığını göstereceğiz.

$n = |ALT(1, 2)| + |ENAZ(3, 4, 5, 6, 7, 8)|$. $\{1\}$ ve $\{2\}$ kümeleri K de olmadığı için $|ALT(1, 2)| = 0$ ya da 1'dir. Ama n ve $|ENAZ(3, 4, 5, 6, 7, 8)|$ çift olduğundan $|ALT(1, 2)|$ de çift yani 0 olmalı. Yani $\{1, 2\}$, K 'de değildir. Aynı şekilde K 'de iki elemanlı alt küme bulunmaz.

Benzer şekilde devam edersek, K 'de 3 elemanlı, 4 elemanlı, ... 7 elemanlı küme bulunmaz. Sadece $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesi bulunabilir fakat bu durum n 'nin çift olması ile çelişir.

Tek çözüm $n=255$ 'tir.

4. $obeb(m, n) = am + bn$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır. Bu durumda

$$\frac{obeb(m, n)}{n} \binom{n}{m} = \frac{am + bn}{n} \binom{n}{m} = \frac{am}{n} \binom{n}{m} + b \binom{n}{m}$$

olur. $b \binom{n}{m}$ tamsayı olduğundan $\frac{am}{n} \binom{n}{m}$ ifadesinin tamsayı olduğunu göstermemiz yeterli.

$$\frac{am}{n} \binom{n}{m} = a \frac{m}{n} \frac{n!}{(n-m)!m!} = a \frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!} = a \binom{n-1}{m-1}$$

olur ki bu da tamsayıdır.

5. Sabit bir C sayısı için $|c_1| = |c_2| = \dots = \frac{1}{C}$ seçelim ve C 'yi eşitliğin diğer tarafına atalım.

Şu halde göstermemiz gereken, $d_i \in \{-1, 1\}$ olmak üzere, $\sum_{i=1}^N d_i (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n)^n$ ifadesinin $x_1x_2 \dots x_n$ 'nin katı olmasını sağlayan bir N sayısı ve uygun katsayıların bulunabildiği dir.

$N = 2^{n-1}$ alalım. Tüm i 'ler için $a_{i1} = 1$ olsun. $(a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in})$ ile terimleri $\{-1, 1\}$ olan oluşturulabilecek tüm dizileri oluşturalım (ki bu dizilerin sayısı 2^{n-1} 'dir). d_i leri ise $(a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in})$ dizisinde çift sayıda -1 var ise 1, tek sayıda -1 varsa -1 seçelim. Şimdi bu toplamın sağladığını gösterelim.

- d_i lerin seçiminden dolayı her parantezden $x_1x_2 \dots x_n$ 'in pozitif bir katı gelecek (toplamda çift sayıda -1 olduğundan dolayı).

- Sağ taraftaki toplamın x_1 ile bölündüğünü gösterelim. Bunun için $x_1 = 0$ için toplamın 0 olduğunu göstermek yeterli. $n - 1$ terimli -1 ve 1 'lerden oluşan tüm dizileri aldığımızdan, her $(a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in})$ dizisi için, $(-a_{i2} = a_{j2} \dots -a_{in} = a_{jn})$ olacak şekilde $a_{j2}, a_{j3}, \dots, a_{jn})$ dizisi vardır. Tüm parantezleri bu diziler çift oluşturacak şekilde gruplayalım. $x_1 = 0$ için, n tek ise iki parantezin önündeki işaret aynı olacak fakat parantezlerden biri diğerinin negatifi olacağı için toplam 0 olur; n çift ise, üstler çift olduğundan iki parantezin değeri aynı olur fakat parantezlerin birinin önünde 1 varken diğerinin önünde -1 olacağı için toplam yine 0 olur. (Tüm çiftlerin toplamı 0 olacağından toplam da 0 olur). Yani sağ taraf x_1 'in bir katıdır.
- Sağ taraftaki toplamın x_i 'nin, $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ bir katı olduğunu gösterelim. Durum simetrik olduğundan sadece x_2 'nin bir katı olduğunu göstermek yeterli. Bunun için $x_2 = 0$ iken sağ tarafın 0 olduğunu gösterelim. Bir önceki şıktaki argümanlar tekrar kullanılarak sağ tarafın x_2 'nin katı olduğunu gösterilir.

Bu durumda sağ taraf $x_1 x_2 \dots x_n$ 'nin bir katı olur ve uygun C sayısı seçilerek eşitlik sağlanır.

$n = 3$ için örnek yazalım.

$$(x + y + z)^3 + (x - y - z)^3 - (x + y - z)^3 - (x - y + z)^3$$

6. *Lemma:* A, B, C ; $y = \lambda/x$ hiperbolü üzerinde ise, bu üç nokta üçgen oluşturur ve ABC üçgeninin yüksekliklerinin kesişim noktası H de bu hiperbolün üzerindedir.

Lemmanın ispatı: Herhangi bir doğru aldığımızda hiperbol ile iki en fazla iki noktada kesişir. Hakikaten de, $y = ax + b$ ve $y = \lambda/x$ denklemleri beraber çözüldüğünde ikinci dereceden bir denklem geleceği için, hiperbol üzerinde üç nokta aldığımızda, bu üç nokta bir üçgen belirtir.

Hiperbol üzerinde 3 nokta alalım: $A = (a, \frac{\lambda}{a})$, $B = (b, \frac{\lambda}{b})$, $C = (c, \frac{\lambda}{c})$. $H = (x, y)$ olsun. H noktasının yüksekliklerin kesişim noktası olması için gerek ve yeter şart $AB \perp CH$ ve $AC \perp BH$ yani $\vec{AB} \cdot \vec{CH} = 0$ ve $\vec{AC} \cdot \vec{BH} = 0$ olmasıdır.

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{CH} &= (b - a)(x - c) + \left(\frac{\lambda}{b} - \frac{\lambda}{a}\right) \left(y - \frac{\lambda}{c}\right) = 0 \\ \Rightarrow \frac{\lambda(a - b)}{ab} \left(y - \frac{\lambda}{c}\right) &= (a - b)(x - c), a \neq b \text{ olduğundan,} \\ \Rightarrow \frac{\lambda}{ab} \frac{yc - \lambda}{c} &= x - c \\ \Rightarrow \frac{\lambda}{abc} &= \frac{x - c}{yc - \lambda} \text{ (1) benzer şekilde ikinci şarttan} \\ \Rightarrow \frac{\lambda}{abc} &= \frac{x - b}{yb - \lambda} \text{ (2) gelir. Bu iki eşitlikten} \\ y &= \frac{\lambda}{x} \text{ gelir, yani } (x, y) \text{ aynı hiperbolün üzerindedir. (1) veya (2) tekrar kullanılarak,} \end{aligned}$$

$$x = -\frac{\lambda^2}{abc}, y = -\frac{abc}{\lambda}$$

bulunur.

İspat özeti: Lemma'yı kullanarak, uygun λ değerini seçerek ve hiperbolü orjin etrafında uygun açıyla döndürerek A, B, C, H 'nin kafes noktaları olmasını sağlamak.

Hiperbolü orjin etrafında saat yönünde α derecelik açıyla döndürelim ve eski kordinat sistemindeki (x, y) noktasını yeni kordinat sisteminde (X, Y) ile gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} X &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ Y &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= X \cos \alpha + Y \sin \alpha \\ y &= -X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{aligned}$$

olur. Hiperbolü yeni sistemde yazıp, düzenleyelim. (Eskisinde $yx = \lambda$)

$$(Y^2 - X^2) \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\lambda} + XY \frac{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\lambda} = 1. \quad (1)$$

Hiperbol üzerinde üç nokta alalım ve yeni kordinat sisteminde H 'nin kordinatlarını hesaplayalım. Köşeler $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$ ve $H(X_4, Y_4)$ olsun. xy -düzleminde H 'nin kordinatlarını şu şekilde hesaplamıştık:

$$x_4 = -\frac{y_1 y_2 y_3}{\lambda}, \quad y_4 = -\frac{x_1 x_2 x_3}{\lambda}$$

Yeni kordinat sistemine geçelim:

$$\begin{aligned} X_4 \cos \alpha + Y_4 \sin \alpha &= -\frac{1}{\lambda} \prod_{i=1}^3 (-X_i \sin \alpha + Y_i \cos \alpha), \\ -X_4 \sin \alpha + Y_4 \cos \alpha &= -\frac{1}{\lambda} \prod_{i=1}^3 (X_i \cos \alpha + Y_i \sin \alpha) \end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} X_4 &= - \left[K \left(\frac{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\lambda} \right) - L \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\lambda} \right) \right] \\ Y_4 &= - \left[M \left(\frac{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\lambda} \right) + N \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\lambda} \right) \right] \end{aligned}$$

bulunur, öyle ki $K = Y_1 Y_2 Y_3, L = X_1 X_2 X_3 + Y_1 Y_2 X_3 + Y_1 X_2 Y_3 + X_1 Y_2 Y_3, M = X_1 X_2 X_3, N = Y_1 Y_2 Y_3 + X_1 X_2 Y_3 + X_1 Y_2 X_3 + Y_1 X_2 X_3$. X_i ve Y_i 'leri tamsayı seçtiğimizde K, L, M, N 'nin de tamsayı olacağı açıktır. X_4 ve Y_4 sayılarını tamsayı olmasını garantilemek için,

$$\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\lambda} \text{ ve } \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\lambda}$$

sayılarını tamsayı yapmak yeterlidir. Bu, (1) nolu denklemdaki katsayıların tamsayı olması ile aynı şey.

İkisi birden sıfır olmayan herhangi C ve D tamsayıları için, bir rotasyon ve λ 'nın uygun seçilmesiyle, $y = \frac{\lambda}{x}$ hiperbolünün yeni kordinat sisteminde

$$C(Y^2 - X^2) + DXY = 1. \quad (2)$$

şeklinde yazılabileceğini gösterelim. (1) nolu denklemi şu şekilde tekrar yazabiliriz:

$$(Y^2 - X^2) \frac{\sin 2\alpha}{2\lambda} + XY \frac{\cos 2\alpha}{\lambda} = 1.$$

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{4C^2 + D^2}}$ seçersek,

$$\frac{\sin 2\alpha}{2\lambda} = C, \quad \frac{\cos 2\alpha}{\lambda} = D$$

şartlarını sağlayan α açısının bulunduğu açıdır.

Geriye, (2) 'deki hiperbolün sonsuz çoklukta tamsayı çözümü olmasını sağlayacak C ve D sayılarını seçmek kaldı. Bunun için $C = D = 1$ 'i deneyelim.

$$(Y^2 - X^2) + XY = 1$$

hiperbolünün bir çözümü (X, Y) ise $(2X + Y, X + Y)$ de bir çözümdür. $(0, 1)$ çözümünden başlayarak, türetilen çözümlerin X kordinatı büyüdüğünden, istenilen şartlarda sonsuz elemanlı S kümesi de bulunur.