

1. (Çözüm: Serdar Ada-Fetih Koleji)

$$1 \leq \frac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{9}{8} \text{ ve } x, y \in \mathbb{R}^+$$

**Sol Taraf:** İfadeyi düzenleyelim:  $(x^2+y^2)^2 \leq (x+y)(x^3+y^3)$ . Cauchy-Schwarz'dan bu eşitsizliğin doğru olduğunu biliyoruz. Alternatif olarak, ifadeyi açalım:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \leq x^4 + y^4 + x^3y + y^3x$$

$$\Rightarrow 2x^2y^2 \leq x^3y + y^3x. \text{ Her iki tarafı da } xy \text{ ye bölelim.}$$

$\Rightarrow 2xy \leq x^2 + y^2$ . Bu ifadenin doğruluğunu da her türlü (AGO'dan, Cauchy-Schwarz'dan,  $(x-y)^2 \geq 0$ 'dan) biliyoruz.

**Sağ Taraf:** İçler dışlar yapıp ifadeyi açalım.

$$8x^4 + 8y^4 + 8x^3y + 8xy^3 \leq 9x^4 + 9y^4 + 18x^2y^2$$

$$\Rightarrow 8x^3y + 8xy^3 \leq x^4 + y^4 + 18x^2y^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^4 - 8x^3y + 18x^2y^2 - 8xy^3 + y^4 \text{ İfade } (x-y)^4 \text{ 'e çok benziyor, } (x-y)^4 \text{ u ayıralım.}$$

$$\Rightarrow 0 \leq (x-y)^4 - 4x^3y + 12x^2y^2 - 4xy^3$$

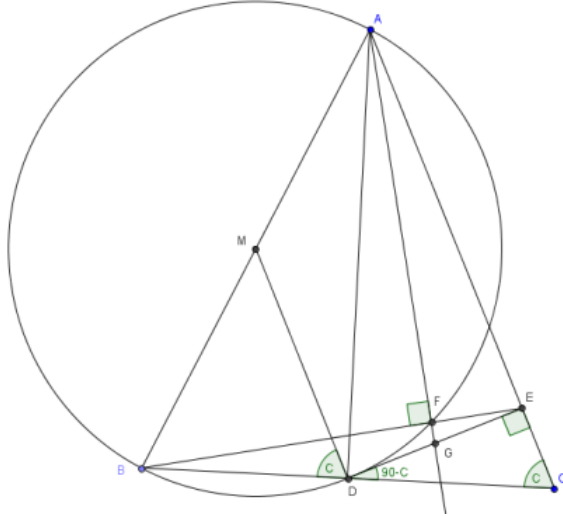
$$\Rightarrow 0 \leq (x-y)^4 - 4xy(x^2 - 3xy + y^2)$$

$$\Rightarrow 0 \leq (x-y)^4 - 4xy(x^2 - 2xy + y^2) + 4x^2y^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq (x-y)^4 - 4xy(x-y)^2 + 4x^2y^2$$

$\Rightarrow 4xy(x-y)^2 \leq (x-y)^4 + 4x^2y^2$ . Bu ifadenin doğruluğunu da her türlü (AGO'dan, Cauchy-Schwarz'dan,  $(x-y)^2 \geq 0$ 'dan) biliyoruz.

2. (Çözüm: Serdar Ada-Fetih Koleji)



$|DG| = |GE|$  olduğunu göstermek istiyoruz.  $|GE|$  yi  $AEG$  dik üçgeninden Öklid'i kullanarak kolaylıkla hesaplayabiliyoruz:  $|GE|^2 = |GF| \cdot |GA|$ .

$|DG|$  nin karesinin de bu ifadeye eşit olduğunu göstermek istiyoruz.  $|DG|^2 = |GF| \cdot |GA|$  olması için  $|DG|$ , çembere teğet olmalı. Çemberin merkezi  $M$  olsun. Yani  $\angle MDE = 90^\circ$  olduğunu göstermeliyiz.

Üçgen ikizkenar ve  $|BD| = |DC|$  olduğundan  $\angle ADB = 90^\circ$  olur.  $\angle ADB = 90^\circ$  olduğundan  $|AB|$  çemberin çapı olur. Yani  $M$ ,  $|AB|$  nin orta noktasıdır.  $M$  ve  $D$  orta noktalar olduğundan  $MD \parallel AC$  dir. Bu durumda  $\angle MDB = \angle ECD$  olur.  $\angle MDE = 180^\circ - (\angle MDB + \angle CDE) = 180^\circ - (\angle ECD + \angle CDE) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ .

**3a.** (Çözüm: Serdar Ada-Fetih Koleji)

İfadenin rasyonel olması için  $\sqrt{n^2 - m^2} = k$  'nın tamsayı yani  $(k, m, n)$  'nin pisagor üçlüsü olması gerekiyor. Ayrıca bu sayıların hepsini sabit bir  $c$  tamsayısı ile çarptığımızda kesrin değeri de  $k$  ile çarpılmış olur.

İfadeyi asal yapmak için aklımıza gelen ilk pisagor üçlüsünü deneyelim:  $\frac{5^2 + 4^2}{3} = \frac{41}{3}$ .  $c = 3$  aldığımızda  $m = 12$ ,  $n = 15$  için  $p = 41$  olur. Benzer şekilde diğer ikisini de bulalım.

$$\frac{5^2 + 3^2}{4} = \frac{17}{2}, c = 2, m = 6, n = 10, p = 17.$$

$$\frac{13^2 + 5^2}{12} = \frac{97}{6}, c = 6, m = 30, n = 78, p = 97.$$

**3b.**  $(k, m, n)$  pisagor üçlüsü olduğundan  $ebob(m, n) = d$  olmak üzere, aralarında asal öyle  $x, y$  pozitif tamsayıları vardır ki,  $n = d(x^2 + y^2)$  ve  $m = d(x^2 - y^2)$  ya da  $m = 2dxy$  'dir.

**I. Durum:**  $m = d(x^2 - y^2)$  ise,

$$\frac{n^2 + m^2}{\sqrt{n^2 - m^2}} = \frac{d(x^4 + y^4)}{xy} = p. \text{ İfadenin tamsayı olması için } x \text{ ve } y \text{ nin payı bölmesi gerekir.}$$

$ebob(x, y) = 1$  olduğundan  $ebob(xy, x^4 + y^4) = 1$  olur. Bu durumda  $xy, d$ 'yi bölmelidir. Fakat  $p$  asal olduğundan  $xy = d$  olmalıdır. O halde  $p = x^4 + y^4$  olur.  $x$  ve  $y$  den biri tek diğeri çift olduğundan  $p \equiv 1 \pmod{8}$  olur.

**II. Durum**  $m = d(2xy)$  ise,

$$\frac{n^2 + m^2}{\sqrt{n^2 - m^2}} = d \frac{x^4 + y^4 + 6x^2y^2}{x^2 - y^2} = d \frac{(x^2 - y^2)^2 + 8x^2y^2}{x^2 - y^2} = d(x^2 - y^2) + d \frac{8x^2y^2}{x^2 - y^2} = p.$$

$p$  nin tamsayı olması için  $d \frac{8x^2y^2}{x^2 - y^2}$  ifadesinin tamsayı olması gerekir.  $x$  ile  $y$  aralarında asal olduğundan  $ebob(x^2y^2, x^2 - y^2) = 1$  olur. Yani  $x^2 - y^2, 8d$ 'yi böler. Ayrıca  $p$  asal olduğundan  $x^2 - y^2$  aynı zamanda  $d$  'nin katı olmak zorundadır.  $x^2 - y^2; d, 2d, 4d$  ya da  $8d$  dir.

- $x^2 - y^2 = d$  ise,  $p = d^2 + 8x^2y^2$  asal ise  $d$  tek olmalı yani  $p \equiv d^2 \equiv 1 \pmod{8}$
- $x^2 - y^2 = 2d$  ise,  $p = 2d^2 + 4x^2y^2$  asal olamaz.
- $x^2 - y^2 = 4d$  ise,  $p = 4d^2 + 2x^2y^2$  asal olamaz.
- $x^2 - y^2 = 8d$  ise,  $p = 8d^2 + x^2y^2$ ,  $x$  ve  $y$  den en az biri çift olduğundan, asal olamaz.

4. (Çözüm: Serdar Ada-Fetih Koleji)

Soruyu graf sorusuna çevirip öyle çözelim. Grafımızda 31 köşe olsun:  $M_1, M_2, \dots, M_{20}, F_1, F_2, \dots, F_{11}$ .  $M_i$  köşeleri matematik sorularını,  $F_j$  fizik sorularını, her bir kenar da öğrencilerin seçtiği soru çiftlerini temsil etsin. Yani bir öğrenci  $M_5$  matematik sorusu ile  $F_8$  fizik sorusunu çözdüyse bunu  $M_5$  ile  $F_8$ 'i birleştiren kenarla göstereceğiz. Bu durumda açıktır ki öğrenci sayısı ile kenar sayısı birbirine eşittir.

Şimdi soruyu okuyarak graf üzerindeki kısıtlamaları belirleyelim.

1. Her kenarın bir köşesi  $M$ 'lerden, diğer köşesi  $F$ 'lerden olmak zorunda.
2. Her iki nokta arasında en fazla 1 kenar çizilebilir.
3. Her kenarın iki köşesinden en az birinin derecesi 2 ya da daha azdır.

Derecesi en fazla iki olan köşelerin dereceleri  $d_1, d_2, \dots, d_k$  olsun. Yukarıdaki 3. maddeden dolayı kenar sayısı  $\leq d_1 + d_2 + \dots + d_k$  olur. Çünkü her kenar bu toplamın içinde en az 1 kez bulunur.  $d_i \leq 2$  olduğu için,  $d_1 + \dots + d_k \leq 2k$  olur. Yani kenar sayısı  $\leq 2k$  'dir.

- $k = 31$  ise,  
Bu durumda tüm noktaların derecesi en fazla 2 olmak zorundadır. Fakat tüm kenarların en az bir köşesi  $F$  olacağı için kenar sayısı en fazla  $2 \times 11 = 22$  olabilir.
- $k = 30$  ise,  
Bu durumda ya tüm  $F$  noktalarının derecesi en fazla 2 ya da tüm  $M$  noktalarının derecesi en fazla 2'dir. Kenar sayısı en fazla  $2 \times 11 = 22$  ya da  $2 \times 20 = 40$  olabilir.
- $k = 29$  ise,  
 $F$  'lerin ya da  $M$  lerin hepsinin derecesi en fazla 2 olduğunda en çok 40 kenar elde edilebildiğini yukarıda gösterdik. Geriye şu durum kalıyor: iki grupta da derecesi 2'den fazla birer köşe varsa.  $F$  lerde derecesi en fazla 2 olan 10 köşe ve derecesi 2'den büyük bir köşe olacak. Derecesi 2'den büyük olan köşenin derecesi en çok 20 olabilir (20 tane  $M$  olduğu için). Yani kenar sayısı en fazla  $2 \times 10 + 20 = 40$  olabilir.
- $k = 28$  ise,  
Yani 3 köşenin derecesi 2'den fazla olması durumu. Yukarıdaki durumlarda  $F$ 'de derecesi 2'den büyük olan köşelerin sayısı 2'den az iken en fazla 40 kenar olabileceğini ispatlamıştık. Geriye sadece  $F$  lerden derecesi 2'den büyük olan köşelerin sayısı 2 ve  $M$  lerden derecesi 2'den büyük olanların sayısı 1 ise durumu kalıyor. Şimdi de kenarların sayısını  $M$  lerden bulalım.  $M$  lerde derecesi en fazla 2 olan 19 köşe ve derecesi 2'den büyük olan 1 köşe var ve o köşenin derecesi en fazla 11. Dolayısıyla kenar sayısı en fazla  $2 \times 19 + 11 = 49$  olabilir.
- $k = 27$  ise,  
Her  $k$  değeri için en fazla  $2k$  kenar olabileceğini biliyoruz.  $k = 27$  için 54 kenarlı bir graf bulmak mümkün. Kenarları listeleyelim:  
( $M_1, F_3$ )  
( $M_1, F_4$ )  
...  
( $M_1, F_{11}$ )  
( $M_2, F_3$ )

$(M_2, F_4)$

...

$(M_2, F_{11})$

$(M_3, F_1)$

$(M_3, F_2)$

$(M_4, F_1)$

$(M_4, F_2)$

$(M_5, F_1)$

$(M_5, F_2)$

...

$(M_{20}, F_1)$

$(M_{20}, F_2)$

Toplamda  $9 + 9 + 2 \times 18 = 54$  kenar yazmış olduk. Daha küçük  $k$  değerleri için 54'ten az kenar oluşturulabileceği için cevap  $\boxed{54}$  tür.